

Пирамида. Правильная пирамида. Усеченная пирамида.

Цели урока:

Обучающие: изучить новый вид многогранников – пирамиды, выйти на понятие правильной пирамиды,

рассмотреть задачи, связанные с пирамидой и с правильной пирамидой,

Развивающие: развивать логическое мышление; пространственное воображение учащихся, умение самостоятельно мыслить, делать выводы, поддержание интереса к математике, развитие познавательного интереса к предмету

Воспитательные: развивать эмоционально-положительное отношение к изучению геометрии, воспитывать культуру графического труда, эстетическое воспитание, развивать геометрическую зоркость, пространственное воображение.

Ход урока

I. Актуализация опорных знаний

Устная работа (фронтальный опрос).

Дан прямоугольный треугольник ABC.



Найдите:

$$\sin A =$$

$$\cos A =$$

$$\operatorname{tg} A =$$

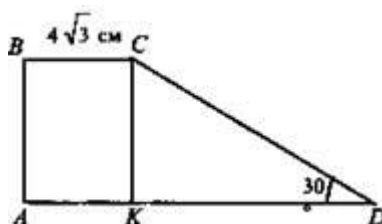
- 1) Треугольник ABC равнобедренный. Проведены высоты к основанию и боковой стороне. Докажите, что $\angle 1 = \angle 2$



Задача 2 (устно)

Дано: ABCD - трапеция. ABCK - квадрат. BC = $4\sqrt{3}$ см. $\angle CDK = 30^\circ$.

Найти: AD - ?

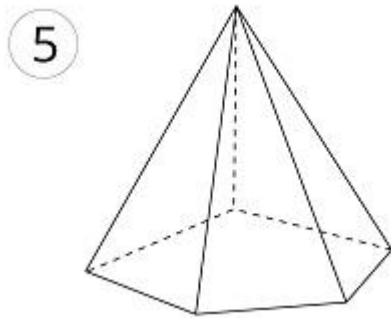


Решение: $AK = 4\sqrt{3}$ см, $AK = BC = CK = 4\sqrt{3}$ см; $KD = \frac{EK}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{1/\sqrt{3}} = 12$ см; $AD = (4\sqrt{3} + 12)$ (см). (Ответ: $AD = (12 + 4\sqrt{3})$ см.)

2. Новый материал:

Определение 1

Многогранник, у которого одна грань есть многоугольник, а все остальные грани — треугольники с общей вершиной, называется пирамидой.



Многоугольная грань пирамиды называется ее основанием, треугольные грани с общей вершиной — боковыми гранями, а их общая вершина — вершиной пирамиды.

Пирамиды в зависимости от числа сторон основания подразделяются на треугольные (они называются тетраэдрами), четырехугольные, пятиугольные и т.д.

Определение 2

Пирамида называется **правильной**, если:

- 1) основание есть правильный многоугольник,
- 2) высота проходит через центр этого многоугольника.

Пирамиду можно получить, если пересечь многогранный угол плоскостью, имеющей общие точки со всеми ребрами.

В правильной пирамиде радиусы окружности правильного многоугольника, лежащего в основании, являются проекциями боковых ребер, поэтому эти ребра равны, а следовательно, равны все боковые грани, являющиеся равнобедренными треугольниками.

Определение 3

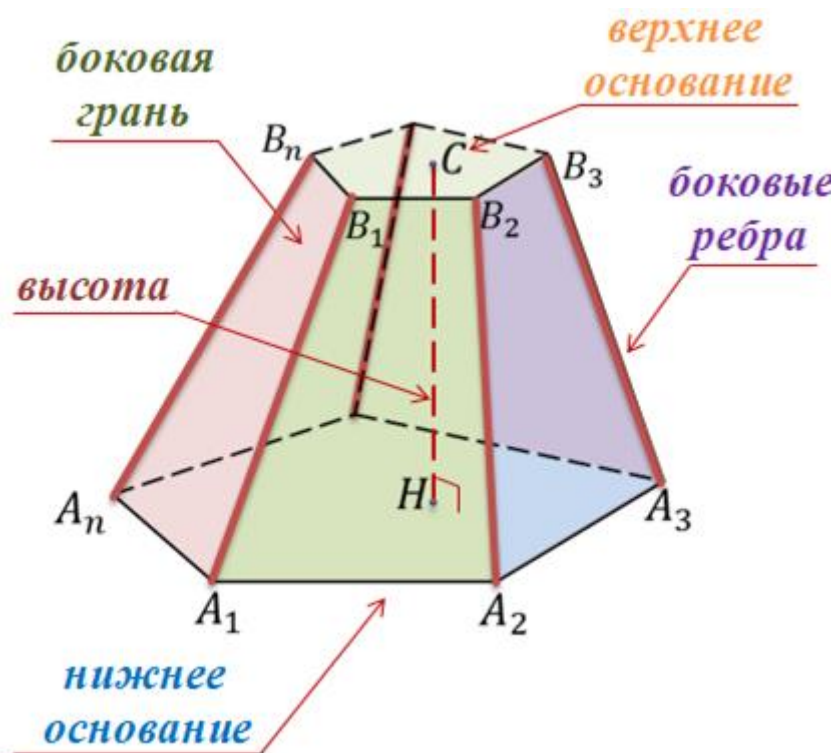
Апофемой правильной пирамиды называется высота ее боковой грани.

Площадь полной поверхности $S_{п.п.} = S + S_{основания}$.

Определение 4

Усеченной пирамидой называется часть пирамиды, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию.

Параллельные грани называются основаниями, а отрезок перпендикуляра, заключенный между основаниями, называется высотой усеченной пирамиды.



Определение 5

Усеченная пирамида называется *правильной*, если она составляет часть правильной пирамиды.

Правильную пирамиду или правильную призму не следует путать с правильным многогранником. Многогранник называется *правильным*, если все его грани — равные правильные многоугольники и все многогранные углы равны (например, куб или правильный тетраэдр).

Боковые грани правильной усеченной пирамиды являются равными равнобоковыми трапециями и многоугольники оснований подобны.

Определение 6

Высота боковой грани (трапеции) называется апофемой усеченной пирамиды.

Площадь боковой поверхности правильной усечённой пирамиды:

$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) \cdot h$, где P_1 и P_2 — периметры оснований;

3. Стандартные задания на пирамиды ($S_{\text{осн}}$, $S_{\text{бок}}$, h_a)

Известны стороны основания — a и высота пирамиды — h . Необходимо найти:

1. $S_{\text{осн}}$
2. $S_{\text{бок}}$, h_a

Решение:

1. Найти $S_{\text{осн}}$

Если есть $\triangle ABC$ (рис. 3), сторона которого равна a , то

$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

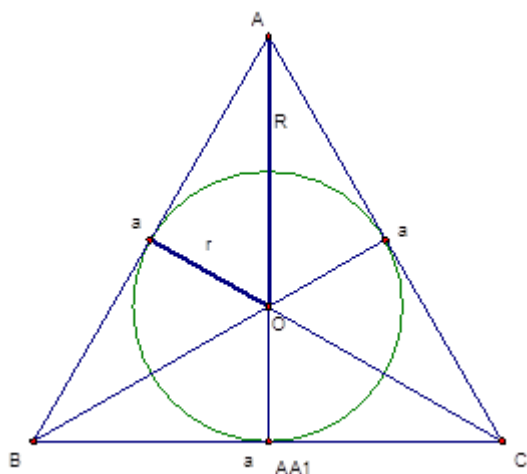


Рис. 3

2. Найти $S_{\text{бок}}$, h_a

Отрезок SC_1 называется апофемой h_a (рис. 2). Апофему найдем из прямоугольного треугольника SC_1O . Известен катет $SO=h$, второй катет C_1O найдем из $\triangle ABC$ (рис. 3).

Для начала найдем высоту AA_1 из прямоугольного треугольника AA_1C :

$$AA_1 = a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Высота AA_1 состоит из радиуса вписанной окружности $r=C_1O$ и из радиуса описанной окружности R (причем $R=2r$). $AA_1 = r + R = 3 \cdot r$;

Следовательно

$$r = C_1O = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$R = 2r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Зная катеты $\triangle SC_1O$, мы можем найти гипотенузу

$$SC_1 = h_a = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{h^2 + \frac{3a^2}{36}} = \frac{\sqrt{36h^2 + 3a^2}}{6}$$

Найдя апофему h_a можно без труда найти

$$S_{\text{SAB}} = \frac{1}{2} AB \cdot h_a = \frac{1}{2} a \cdot \frac{\sqrt{36h^2 + 3a^2}}{6} = \frac{a\sqrt{36h^2 + 3a^2}}{12}$$

И

$$S_{\text{бок}} = 3 \cdot S_{\text{SAB}} = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot h_a$$

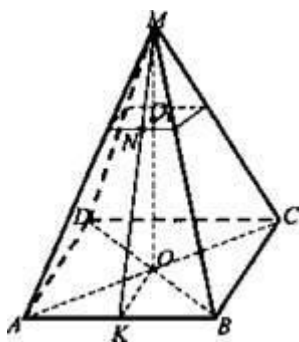
4. Закрепление.

№ 268 в тетрадах.

Дано: $MABCD$ - правильная пирамида, $A_1B_1C_1 \parallel ABC$, MO_1 : $O_1O = 1: 3$, NK - апофема, $NK = 4$ дм, $S_{\text{ус.пир.}} = 186$ дм²

Найти: OO_1 - ?

Решение.



Рассмотрим ΔMKO . Так как $NO_1 \parallel KO$, то $MO_1 : MO = O_1N : OK$, значит, стороны $B_1C_1 : BC = MO_1 : MO$. $B_1C_1 = 1 : 3$.

Пусть $B_1C_1 = x$, $BC = 3x$. Имеем

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} (4x + 12x) \cdot 4 = 32x;$$

$$S_{\text{осн}} = x^2 + 9x^2 = 10x^2$$

$$S_{\text{полн}} = 10x^2 + 32x = 186$$

$$5x^2 + 16x - 93 = 0$$

$$x_1 = 3; x_2 = -6,2 \text{ (не удовлетворяет условию задачи);}$$

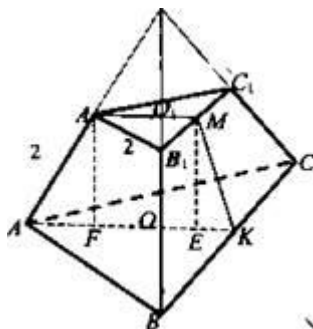
$B_1C_1 = 3$ (см), $NO = 1,5$ (см); $BC = 9$ (см), $OK = 4,5$ (см); $KF = OK - NO_1 = 3$.

Из ΔKNF по теореме Пифагора $NF = \sqrt{OK^2 - KF^2} = \sqrt{7}$.

Ответ: $\sqrt{7}$ дм.

№ 269. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — усеченная пирамида. $AB = BC = AC = 4$ см; $A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1 = 2$ см; $AA_1 = 2$ см.

Найти: MK - ? $A \setminus F \setminus$ - ?



Решение: Пусть O и O_1 - центры оснований пирамиды.

1) Из ΔABC имеем: $AB = R\sqrt{3}$, $R = AO$. $AO = \frac{4}{\sqrt{3}}$ дм, $OK = \frac{1}{2} AO = \frac{2}{\sqrt{3}}$ дм.

2) Из $\Delta A_1B_1C_1$ находим $A_1O = \frac{2}{\sqrt{3}}$ дм, $O_1M = \frac{1}{\sqrt{3}}$ дм.

3) $EK = OK - OE$, $OE = O_1M$, откуда $EK = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ дм.

4) Из ΔAA_1F имеем: $FA = AO - FO$, $FO = A_1O$, $AF = \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ дм.

$$A_1F = \sqrt{AA_1^2 - AF^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ дм.}$$

Домашнее задание: параграф 2, №239,№240

Литература: онлайн учебник по геометрии за 10-11 класс - авторы Атанасян, Бутузов, Кадомцев, Киселева, Позняк - 2011, 2012, 2013, 2014, 2015 год - ФГОС.