

Конспект урока "Сечения куба, призмы, пирамиды"

Цель урока:

- а) образовательная: отработать навыки в построении сечения объемных тел; развитие речи, мышления.
- б) воспитательная, развивающая: формирование у обучающихся самостоятельности, наблюдательности, трудолюбия, умения сравнивать, делать вывод; прививать чувства ответственности и сознательного отношения к изучаемому материалу

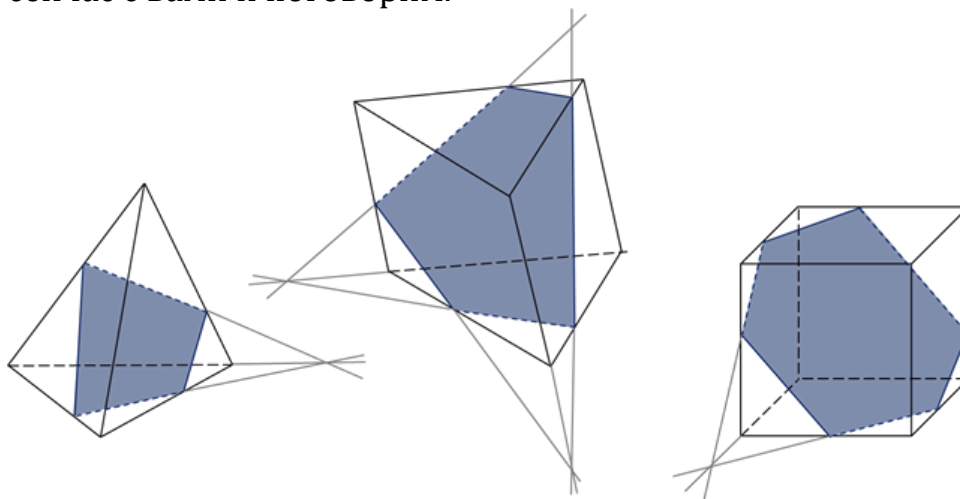
Актуализация опорных знаний.

Вспомним:

- пересечение прямой с плоскостью;
- пересечение плоскостей;
- свойства параллельных плоскостей.

Новый материал

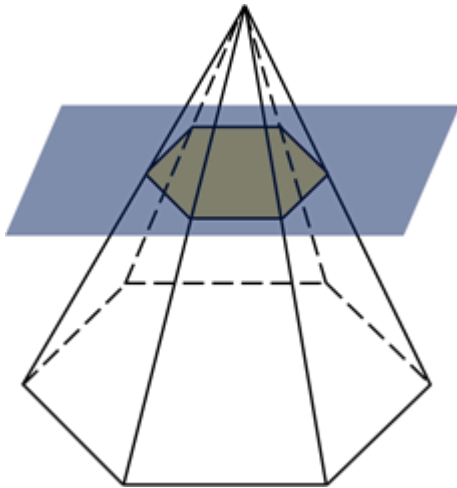
Для решения большинства задач из раздела стереометрии необходимы знания и навыки в построении сечения объемных тел. Именно об этом мы сейчас с вами и поговорим.



Итак, **секущей плоскостью** называют любую плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данной фигуры.

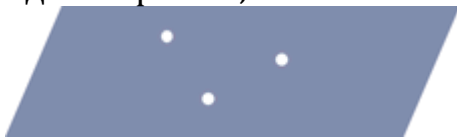
Секущая плоскость пересекает грани многогранника по отрезкам.

Многоугольник, сторонами которого являются эти отрезки, называется **сечением** многогранника.

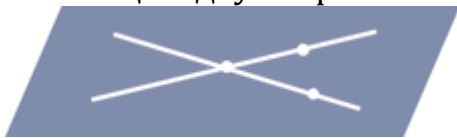


Построить сечение многогранника плоскостью – это значит указать точки пересечения секущей плоскости с рёбрами многогранника и соединить эти точки отрезками, принадлежащими граням многогранника. Теперь давайте вспомним, что нам необходимо знать для построения плоскости.

Итак, построить плоскость можно: с помощью трёх точек, не лежащих на одной прямой;



с помощью двух пересекающихся прямых;



с помощью прямой и точки, которая не лежит на прямой;



а также с помощью двух параллельных прямых.



Основные методы построения сечений многогранников

Метод следов

Метод вспомогательных
сечений

Комбинированный
метод

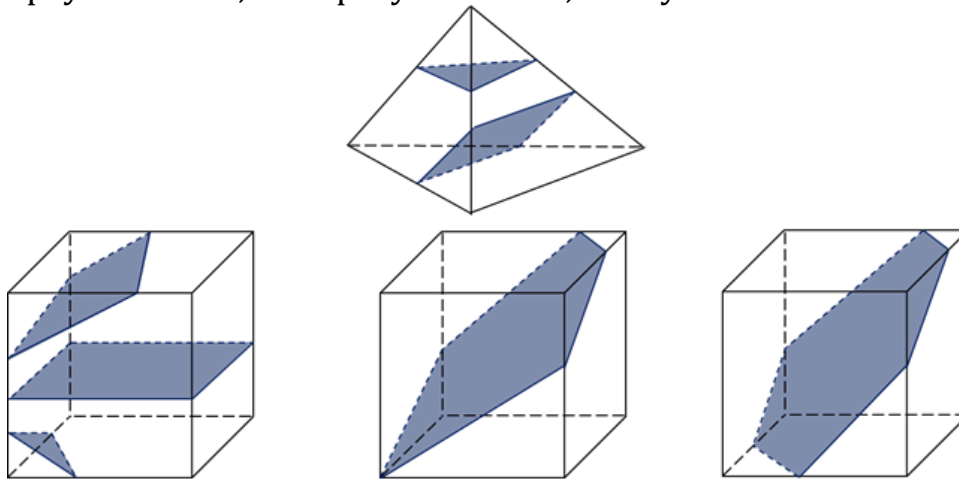
Метод следов включает три важных пункта: сначала нужно построить линию пересечения (след) секущей плоскости с плоскостью основания многогранника; затем найти точки пересечения секущей плоскости с рёбрами многогранника, а после этого построить и заштриховать сечение. В основе построения сечения методом следов лежат две теоремы:

- 1) если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит плоскости;
- 2) если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и эти плоскости пересекаются, то линия их пересечения параллельна первой прямой.

Метод вспомогательных сечений применяется при построении сечений в тех случаях, когда неудобно находить след секущей плоскости. Например, след получается очень далеко от заданной фигуры.

Суть **комбинированного метода** построения сечений многогранников состоит в применении теорем о параллельности прямых и плоскостей в пространстве в сочетании с методом следов или методом вспомогательных сечений.

Обратите внимание: тетраэдр имеет четыре грани, поэтому его сечениями могут быть только треугольники и четырёхугольники. А вот параллелепипед имеет шесть граней, поэтому его сечениями могут быть треугольники, четырёхугольники, пятиугольники и шестиугольники.



Основные моменты мы с вами повторили, а теперь давайте перейдём к практической части занятия.

Задача первая. В основании прямой призмы лежит равнобедренная трапеция с основаниями, равными 10 см и 4 см, и боковой стороной, равной 4 см. Боковое ребро призмы равно 6 см. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через большую сторону основания и середину противоположного бокового ребра призмы.

Решение.

$ABCD$ – основание призмы.

$AD \parallel BC$

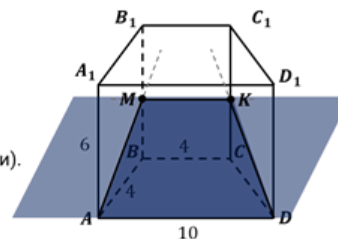
$AB = CD = 4$ см

$BM = MB_1$

$AD \parallel (BB_1C_1C)$ (по признаку параллельности прямой и плоскости).

$MK \parallel AD$

$AMKD$ – искомое сечение.



$\triangle ABM$ – прямоугольный.

$$BB_1 = AA_1 = 6 \text{ см}, BM = MB_1 \Rightarrow BM = \frac{1}{2}BB_1 = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3 \text{ (см)}$$

$$AM = \sqrt{AB^2 + BM^2}$$

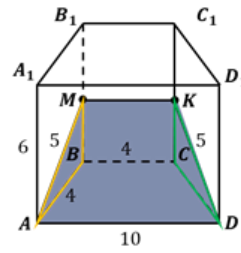
$$AM = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ (см)}$$

$$MB = KC = 3 \text{ см}$$

$$\triangle ABM = \triangle DCK \text{ (по двум катетам)} \Rightarrow DK = AM = 5 \text{ см}$$

$BMKC$ – прямоугольник.

$$MK = BC = 4 \text{ см}$$



$AMKD$ – равнобедренная.

$$MH \perp AD, KP \perp AD$$

$HMKP$ – прямоугольник.

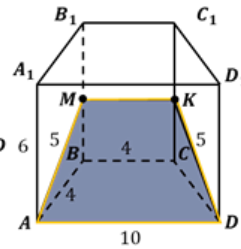
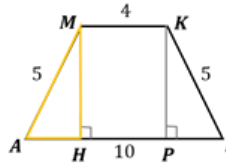
$$HP = MK = 4 \text{ (см)}$$

$$AH = PD = \frac{10-4}{2} = 3 \text{ (см)}$$

$$MH = \sqrt{AM^2 - AH^2}$$

$$MH = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4 \text{ (см)}$$

$$S = \frac{10+4}{2} \cdot 4 = 28 \text{ (см}^2\text{)}$$



Ответ: 28 см².

Задача вторая. На ребре AD правильного тетраэдра $DABC$ с длиной ребра a взята точка M такая, что $MA : MD = 3 : 1$. Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью, содержащей точку M и перпендикулярной ребру AD .

Решение.

$$MP \perp AD$$

$$MN \perp AD$$

$$(MPN) \perp AD$$

MPN – искомое сечение.

$\triangle MDP$ – прямоугольный.

$$\angle MDP = 60^\circ$$

$$\angle DPM = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$MD = \frac{a}{4}, \text{ так как } MA : MD = 3 : 1.$$

$$DP = 2MD = 2 \cdot \frac{a}{4} = \frac{a}{2} \text{ как катет, лежащий напротив угла } 30^\circ.$$

$$\operatorname{tg} \angle MDP = \frac{MP}{MD}$$

$$PM = \frac{a}{4} \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{a}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$\triangle DMN$ – прямоугольный.

$$\angle MDN = 60^\circ$$

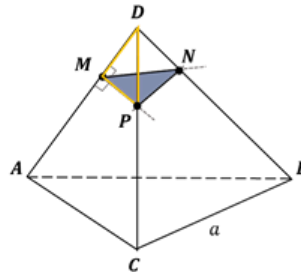
$$\angle DNM = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$DN = 2MD = 2 \cdot \frac{a}{4} = \frac{a}{2}$$

$$MN = \frac{a}{4} \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{a}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$DP = DN = \frac{a}{2}$$

$$\angle PDN = 60^\circ \Rightarrow \triangle DNP \text{ – равносторонний} \Rightarrow PN = \frac{a}{2}$$

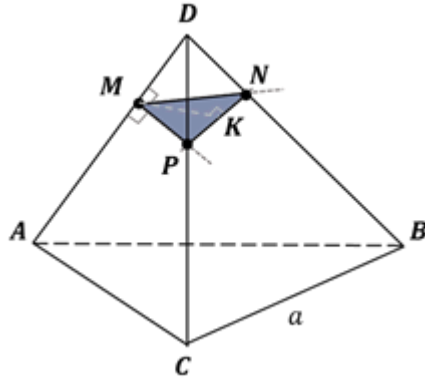


$\triangle MPN$ – равнобедренный.

$$PM = MN = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$MK \perp PN$$

$$PK = KN = \frac{1}{2}PN = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{4}$$



$$MK = \sqrt{MP^2 - PK^2}$$

$$MK = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{16} - \frac{a^2}{16}} = \sqrt{\frac{2a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{a^2\sqrt{2}}{16}$$

Ответ: $\frac{a^2\sqrt{2}}{16}$.

Задача третья. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$, а две боковые грани SAB и SAD представляют собой прямоугольные треугольники с прямым $\angle A$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, содержащей точку пересечения диагоналей основания и параллельной грани SBC , если $SA = AB = a$.

Решение.

$$AC \cap BD = O$$

$$\angle SAB = \angle SAD = 90^\circ$$

$$SA \perp (ABCD)$$

$$OK \parallel SC$$

$$AK = KS$$

$$KM \parallel SB$$

$$AM = MB$$

$$NP \parallel SC$$

$$KP \parallel AD \parallel MN$$

$KMNP$ – трапеция.

$$AK = KS, AM = MB, DN = NC, DP = PS.$$

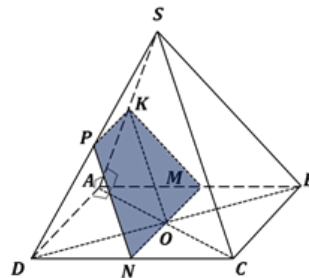
$$MN = AD = a$$

$$KP = \frac{1}{2}AD = \frac{a}{2}$$

$$KM = \frac{1}{2}SB$$

$$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2}$$

$$SB = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow KM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



$$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AB$$

$$AB \perp BC \Rightarrow SB \perp BC \text{ (по теореме о трёх перпендикулярах).}$$

$$KM \perp MN$$

KM – высота трапеции $KMNP$.

$$S = \frac{KP+MN}{2} \cdot KM$$

$$S = \frac{\frac{a}{2}+a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{2}}{8}$$

Ответ: $\frac{3a^2\sqrt{2}}{8}$.

Домашнее задание: №72, №79 (стр.29-30) параграф 4

Литература: онлайн учебник по геометрии за 10-11 класс - авторы Атанасян, Бутузов, Кадомцев, Киселева, Позняк - 2011, 2012, 2013, 2014, 2015 год - ФГОС.